

Knobelei für Mathematiker und Biologen - Genom 1200

Beitrag von „alias“ vom 10. Oktober 2015 18:52

Eine nette Knobelei, bei der ich auch noch keine Lösung gefunden habe:

Jeder Mensch hat zwei Eltern, 4 Großeltern, 8 Urgroßeltern, 16 Ururgroßeltern...

Nach vier Generationen haben also $2+4+8+16= 30$ Menschen ein Stück Erbgut beigetragen.

Mathematisch:

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 (2^4 - 1) = 30$$

Geht man von 3 Generationen pro Jahrhundert aus, so haben seit dem Jahr 1200 insgesamt 27 Vorfahren-Generationen gelebt, die einem heute geborenen Kind ein Stück für das Genom mitgegeben haben.

Das wären

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{27} = 2 (2^{27} - 1) = 2(134217728-1) = 268.435.454 \text{ Menschen}$$

Seit dem Jahr 1200 befindet sich selbstverständlich die Mehrzahl dieser Vorfahren bereits im Jenseits.

Nun jedoch die Quizfrage:

Von wie vielen Menschen, die zu Beginn des 12.Jahrhunderts gelebt haben, trägt ein heute geborenes Kind ein Stückchen Erbgut in sich?

Anders gefragt:

Wie viele von den 268.435.454 Vorfahren haben im Jahre 1200 gelebt?

[Blockierte Grafik: <http://cdn2.slidehunter.com/wp-content/uploads/tree-diagram-powerpoint.jpg>]

Beitrag von „Volker_D“ vom 10. Oktober 2015 19:29

Das Modell muss bei einem so großen Zeitraum verbessert werden.

Ansonsten würde man im Jahr 1200 etwa 2^{27} Vorfahren haben. Das sind 137 Millionen. Damit

wäre man mit der halben Weltbevölkerung verwandt.

Nach "krasser" ist es 100 Jahre früher, also Jahr 1100. Dort müssten dann 2^{30} Vorfahren leben. Das sind über 1 Milliarde. Zu der Zeit lebten Schätzungsweise aber keine 500 Millionen Menschen auf der Erde.

siehe:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Weltbev%C3%B6lkerung>

Beitrag von „alias“ vom 10. Oktober 2015 20:44

Du musst die Summe berechnen. 2^{27} ergibt die falsche Zahl.

Du musst auch die in 8 Jahrhunderten Verstorbenen abziehen. Das sind immerhin 24 Generationen.

Dies kann jedoch nicht die Lösung des Problems bringen

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{27} = 2(2^{27} - 1) = 2(134217728 - 1) = 268.435.454 \text{ Menschen}$$

minus

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24} = 2(2^{24} - 1) = 33.554.430$$

Bleiben immer noch 234.881.024 - die damals die halbe Weltbevölkerung darstellten.

Wo liegt der Fehler? Oder sind wir wirklich alle genetisch miteinander verwandt - wenn man so weit zurückrechnet?

Beitrag von „Mikael“ vom 10. Oktober 2015 22:06

Der Fehler liegt wohl darin, dass es eben nicht "jeder mit jedem" getan hat. So weit ich mich erinnere, bilden z.B. die Isländer eine genetisch relativ homogene Gruppe, so homogen, dass irgendein Konzern Interesse daran hat, dieses "isländische Genom" zu erforschen.

Gruß !

Beitrag von „alias“ vom 10. Oktober 2015 22:10

Dein Denkfehler liegt darin, dass du zu kurzfristig denkst.

Es geht um die Vorfahren der Vorfahren von den Vorfahren der Vorfahren deren Genome sich nun bei der Geburt eines Kindes treffen.

Die Frage lautet:

Wie viele dieser genetischen Vorfahren eines Kindes, das heute geboren werden, lebten im Jahr 1200 und nicht um Rossini – oder die mörderische Frage, wer mit wem schlief 😊

Beitrag von „Mikael“ vom 10. Oktober 2015 22:18

Dein "Modell" beruht auf mindestens zwei Denkfehlern:

Einen habe ich dir genannt (die Menschen haben sich nicht kreuz und quer über alle Kontinente gepaart).

Den andere hat Volker_D genannt: Es gab "früher" einfach nicht so viele Menschen, wie dein "Modell" benötigt.

Also: "Modell" in die Tonne treten und neuen Ansatz versuchen!

Gruß !

Beitrag von „alias“ vom 11. Oktober 2015 00:01

Bitte keine Mülltonne - sondern eine mathematisch stichhaltige Lösung der Aufgabe.

Lies bitte mein Eingangposting und denk nach - oder lass es.

Nochmals ganz einfach:

Jeder Mensch besitzt ein Paar als Eltern.

Die Eltern haben ebenfalls Eltern (die nennen sich dann Großeltern) - macht 4+2 Personen als Vorfahren (=6)

Die Großeltern besitzen ebenfalls Eltern - macht 8+4+2 Personen als Vorfahren (=14)

Die UrGroßeltern besitzen ebenfalls Eltern - macht 16+8+4+2 Personen als Vorfahren (=30)

Die UrUrGroßeltern besitzen ebenfalls Eltern - macht 32+16+8+4+2 Personen als Vorfahren (=62)

Rechnet man bis zur n-ten Generation, ergibt das $2^n + 2^{(n-1)} + \dots + 2^4 + 2^3 + 2^2 = 2 \cdot (2^n - 1)$ Vorfahren.

Bei 27 Generationen ergibt das die oben genannte Zahl von 268.435.454 Menschen.

Ich hab das Prinzip oben mit einem Bildchen veranschaulicht ... THINK!

Diese 27 Generationen haben nicht gleichzeitig gelebt (und miteinander "rumgemacht"), haben jedoch in der Fortpflanzungsreihe jeweils ein Stückchen Ihres Genoms zum heute geborenen Baby - nennen wir es Kevin - beigetragen.

Die etwas knifflige, mathematisch zu lösende Aufgabe lautet nun:

Wie viele Menschen, die im Jahr 1200 gelebt haben, sind im Genom von Kevin vertreten?

Im Jahr 1200 dürften ebenfalls 2-3 Generationen gleichzeitig gelebt haben.

Beitrag von „SteffdA“ vom 11. Oktober 2015 10:49

Nun, das 12. Jahrhundert geht grob von 1100 - 1200.

Wenn pro Jahrhundert 3 Generationen leben, dann sollte deine Folie zur Darstellung ausreichen.

Das wären die untersten drei Ebenen.

Davon zieht man die ab, die zwischen 1100 und 1200 verstorben sind und die, die nicht mehr zeugungsfähig sind (weil zu alt).

Der Rest sind die, die ab 1200 ihr Erbgut weitergegeben haben können.

Irrtümer und Denkfehler **nicht** ausgeschlossen.

Beitrag von „alias“ vom 11. Oktober 2015 11:12

Es ist wie in der Schule.

Die Aufgabenstellung lautet:

Zitat

Wie viele Menschen, die **im Jahr 1200** gelebt haben, sind im Genom von Kevin (geboren 2015) vertreten?

Meine Folie von oben muss um 24 weitere Ebenen nach unten "erweitert gedacht" werden:

2-4-8-16-32-64-128-256-512-1024.... die normale 2-er-Potenz-Reihe (die hier 'Nomen est Omen') Nachkommen erzeugte 😊
Es handelt sich um einen - auf den Kopf gestellten - Stammbaum, an dessen Spitze nun Kevin erscheint.

Dadurch ergibt sich auch die Lösung des Problems.

In der 27.Ebene (im Jahr 1200) lebten (mathematisch gesehen) 2^{27} **genetisch verschiedene** Vorfahren von Kevin.

Kann eigentlich nicht sein, aber:

Diese Zahl stimmt nur, falls zwischendrin in der Paarungsabfolge kein Inzest - z.B. nach 4,5, oder mehr Generationen - erfolgte - was relativ unwahrscheinlich ist. Somit lässt sich erklären, weshalb im Jahr 1200 nicht die gesamte europäische Bevölkerung Kevins Vorfahren stellt - und weshalb Kevin Kevin ist - oder Chantal Chantal.... 😊

Die Mathematik korreliert eben manchmal nicht mit der Wirklichkeit.

Beitrag von „Piksieben“ vom 11. Oktober 2015 22:50

Die Baumstruktur gibt hier nur scheinbar die Anzahl der Vorfahren im betrachteten Zeitraum wieder. Das liegt nicht an der Mathematik, sondern an der Modellierung. Die Elemente in dieser Darstellung sind nicht notwendigerweise alle verschieden. Einfachster Fall, wie erwähnt, Geschwisterehe. Damit ist das Ganze aber auch gar keine Baumstruktur mehr, und die Summenformel von oben passt nicht.

Beitrag von „alias“ vom 12. Oktober 2015 14:22

Sach ich doch: Kevin und Chantal....

Eine Zeugung von Großcousine und Großcousin in der 5.Ebene lässt einen kompletten Wurzelstrang mit 2^{21} Vorfahren wegbrechen.

Es bleiben dann trotzdem noch 31 Stränge übrig = $31 * 2^{21}$

Auf Westerland oder in Fürstenhäusern mag das durchaus anders ausschaun 😊

Beitrag von „StrKuck“ vom 12. Oktober 2015 16:33

Es muss nicht zwingend direkte Geschwisterliebe sein. Die Frage lautet auch, ab wann zählt man eine Verwandtschaft bzw. ab wann zählt eine Verwandtschaft nicht mehr. So wird es zwangsläufig dazu kommen, dass sich entfernte Verwandte irgendwann paaren werden. Außerdem geht das Modell davon aus, dass immer nur ein Kind geboren wurde. Hieran wird spätestens deutlich, dass das Modell in der Realität ohne Einbezug von Verwandten nicht funktionieren kann. Darüber hinaus müsste die unterschiedliche Lebenserwartung berücksichtigt werden, die um 1200 schätzungsweise deutlich unter 40 Jahren gewesen sein dürfte.

Soll das Modell trotzdem so mathematisch bleiben ohne Berücksichtigung anderer Faktoren, also davon ausgehend, dass sich tatsächlich immer nur zwei Menschen paaren, die vorher in keiner Weise verwandt waren und nur ein Kind gezeugt haben, dann stimmen die Zahlen tatsächlich.

Beitrag von „alias“ vom 12. Oktober 2015 21:22

Für die Weitergabe der genetischen Information bis zu einem heute lebenden Menschen ist es unerheblich, wie viele Geschwister innerhalb einer Generation vorhanden waren. Diese sind nicht an der Zeugung beteiligt.

Geschwisterliebe war immer tabu, daher ist diese im Modell irrelevant.

Beitrag von „kleiner roter Stern“ vom 12. Oktober 2015 22:41

Zitat von alias

Für die Weitergabe der genetischen Information bis zu einem heute lebenden Menschen ist es unerheblich, wie viele Geschwister innerhalb einer Generation vorhanden waren. Diese sind nicht an der Zeugung beteiligt.

Geschwisterliebe war immer tabu, daher ist diese im Modell irrelevant.

Tja, trotzdem gab und gibt es das immer wieder, auch in meiner entfernten Bekanntschaft. One Night Stand, Kind bekommen und bei der Suche nach dem Vater stellte sich raus, dass es der

ältere (+ 15 Jahre) Bruder war, der sich vor Jahren im Streit von der Familie trennte.

Zitat von alias

Geht man von 3 Generationen pro Jahrhundert aus, so haben seit dem Jahr 1200 insgesamt 27 Vorfahren-Generationen gelebt, die einem heute geborenen Kind ein Stück für das Genom mitgegeben haben.

Gerade in der früheren Zeit (und jetzt auch manchmal) haben die Frauen oft sehr früh Kinder bekommen, wobei die Männer oft älter waren,

D.h. das Modell von immer 3 Generationen pro Jahrhundert klappt nicht, wenn die Frauen mit 15-20 Kinder bekamen, die Männer mit ca 40 - 50.

In meiner Familie hat die eine Seite auch immer eher spät geheiratet, und auf der anderen Seite sind die Hochzeiten deutlich früher, so dass auf der gleichen Zeitschiene einmal meine Ur-Urgroßeltern mütterlicherseits sind, auf der anderen meine Ur-Urgroßeltern väterlicherseits. Und das setzt sich weiter fort, aber ich bin in meiner Ahnenreihe auch noch nicht bis 1200 durchgekommen

Früher wurde in meinem Dorf meist nur innerhalb geheiratet, so dass fast alle mit allen verwandt waren. Ich hörte bei jeder Beerdigung von meiner Großmutter: da muss ich hin, denn ich bin mit dem so und so verwandt, gleich darauf von meinem Großvater: ich muss da auch hin, denn ich bin mit dem über 5 anderen Ecken verwandt. Wenn man ins Telefonbuch schaut, finden sich da nur wenige Nachnamen, dafür sehr viele Untereinträge zu einem Nachnamen. Erst seit den letzten ca 75 Jahren wird das anders.

Beitrag von „Piksieben“ vom 12. Oktober 2015 23:29

Zitat von StrKuck

Soll das Modell trotzdem so mathematisch bleiben ohne Berücksichtigung anderer Faktoren, also davon ausgehend, dass sich tatsächlich immer nur zwei Menschen paaren, die vorher in keiner Weise verwandt waren und nur ein Kind gezeugt haben, dann stimmen die Zahlen tatsächlich.

Wo sollen die Leute denn alle herkommen? Tatsache ist, die Menschheit ist nicht weniger, sondern mehr geworden, viel mehr. Wie soll das gehen, ohne dass die untereinander verwandt sind? Sind die alle auf verschiedenen Kontinenten aus dem Boden gewachsen?

Natürlich kann man stets alle nur erdenklichen Faktoren weglassen. Aber bitte nicht hinterher behaupten, Mathematik sei weltfremd.

Beitrag von „Piksieben“ vom 13. Oktober 2015 14:03

Wenn man sich über exponentielles Wachstum wundern möchte (darum geht es hier ja eigentlich), geht das besser mit dem "Falten bis zum Mond". Die Frage ist: Wie oft müsste man (wenn es ginge) ein DIN A4-Blatt falten, um die Strecke bis zum Mond zurückzulegen? "Falten" heißt hier: Einmal zusammenklappen. Dadurch verdoppelt sich die Höhe.

Immer wieder nett. Schon der experimentelle Ansatz ist erstaunlich: Schon mal probiert, wie oft man ein Blatt überhaupt falten kann?

Beitrag von „StrKuck“ vom 13. Oktober 2015 16:42

Das hier beschriebene Modell geht ja davon aus, dass von einem Kind die Eltern betrachtet werden und von den Eltern wieder die Eltern, OHNE dass jemals irgendjemand miteinander verwandt gewesen sein durfte. Und damit wollte ich sagen, dass das unmöglich ist. Wo sollen die denn alle herkommen ist da genau das, worauf ich hinaus wollte. In der Realität MUSS es so gewesen sein, dass irgendwann zwei Menschen ein Kind bekommen werden, die beide in irgendeiner Form verwandt sind, auch wenn es über 10 Ecken ist. Geschwisterliebe wäre ja nur der absolute Extremfall, aber entfernte Verwandte wissen vielleicht nicht mal, dass sie miteinander verwandt sind. Das ist ein Haken am Modell.

Der andere Haken liegt in der Lebenserwartung. Wenn man zurückrechnen möchte, wie viele Generationen man durchlaufen muss um im 12. Jahrhundert anzukommen, dann müsste man davon ausgehen, dass alle immer im gleichen Alter Kinder bekommen haben. Früher hat man vielleicht schon mit 14 ein Kind bekommen und heute vielleicht erst mit 35.

Die Geschwister sind in der Frage tatsächlich nicht relevant, höchstens um zu verdeutlichen, dass die Bevölkerungszahl eigentlich nochmal deutlich höher hätte sein müssen, als es mit dem Modell bei immer nur einem Kind der Fall ist.